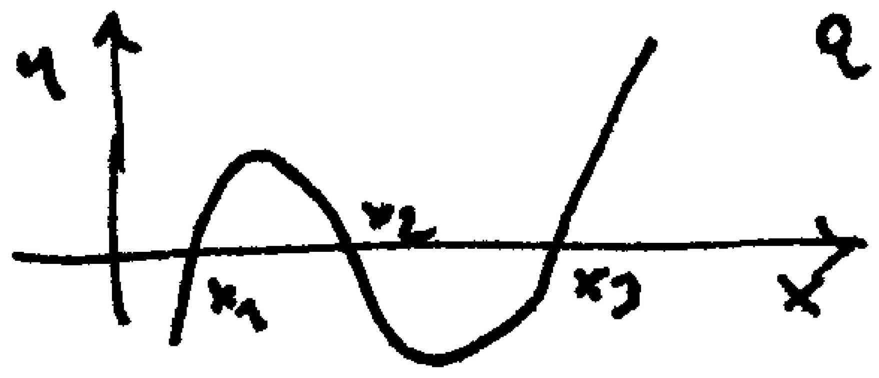
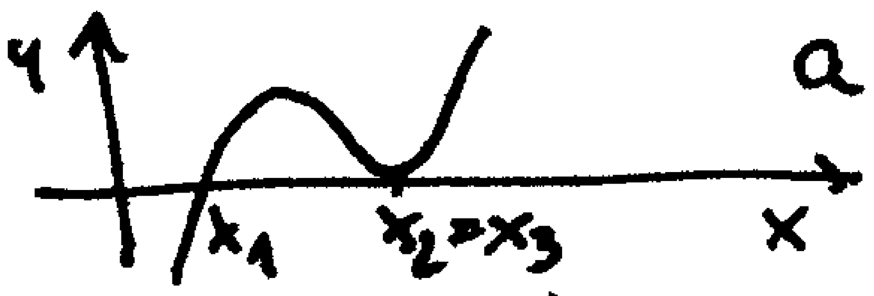
24.11.2011 **Matematyka wykład**

Funkcje

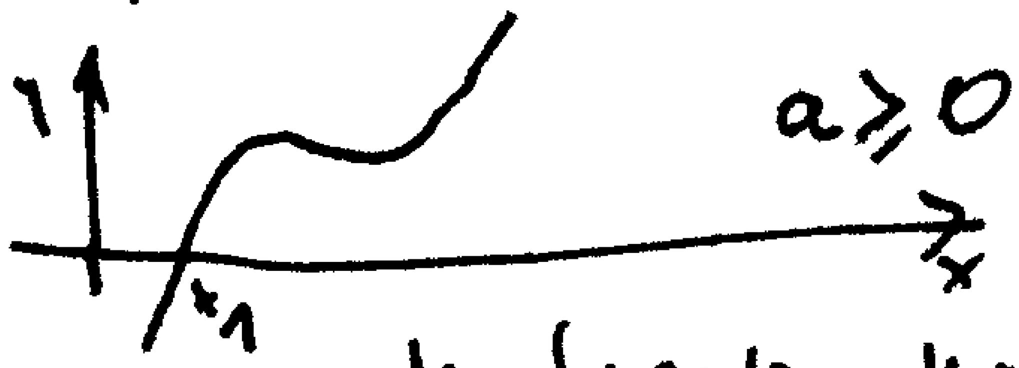
1. Funkcja liniowa $y = ax + b$, $Ax + By + C = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
   - kiedy rosnąca $a > 0$ — miejsce zerowe $ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$
   - kiedy malejąca $a < 0$ — b — punkt przec. z osią OY.
2. Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$
   Δ, wzory na pierwiastki wyznaczane zależne od Δ i a
   rozkład na czynniki $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ gdy $\Delta > 0$
   $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ gdy $\Delta = 0$
3. Wielomian 3 stopnia $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $a \neq 0$



$a > 0$ $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

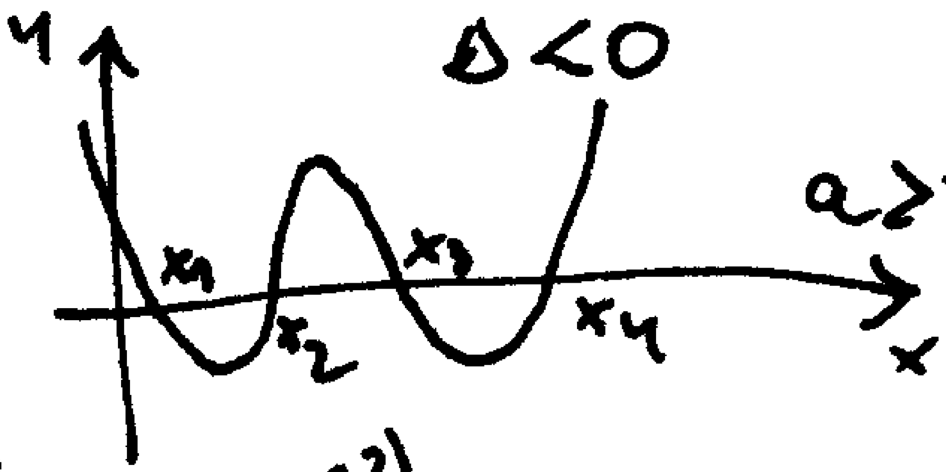


$a > 0$ $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)^2$



$a \geq 0$ $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)\underbrace{(x^2 + ex + f)}_{\Delta < 0}$

4. Wielomian 4 stopnia $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$



$a > 0$

Ważne wzory

$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$

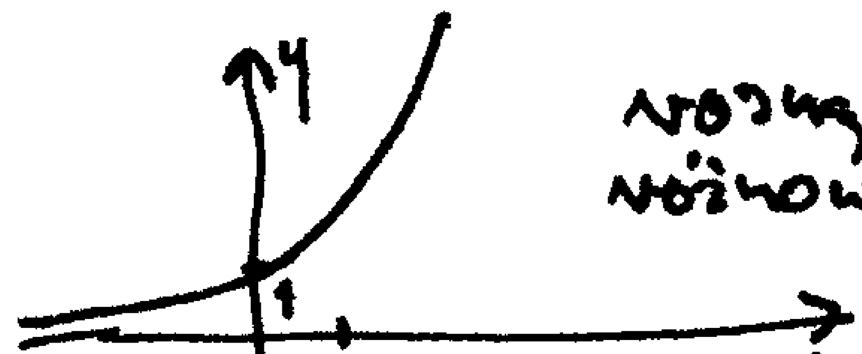
$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

$(a - x)^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$

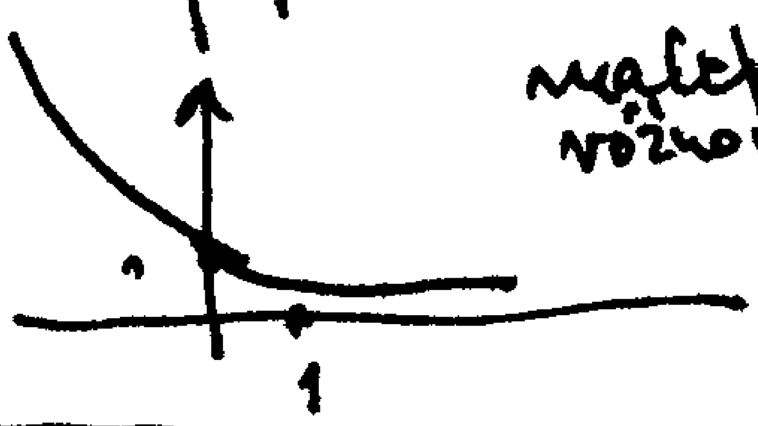
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

5. Funkcja wykładnicza $y = a^x$, $a > 0$
   gdy $a = 1$ — funkcja stała $y = 1$
   Ważna podstawa $e = 2.7182\,818\,28$ (Euler)

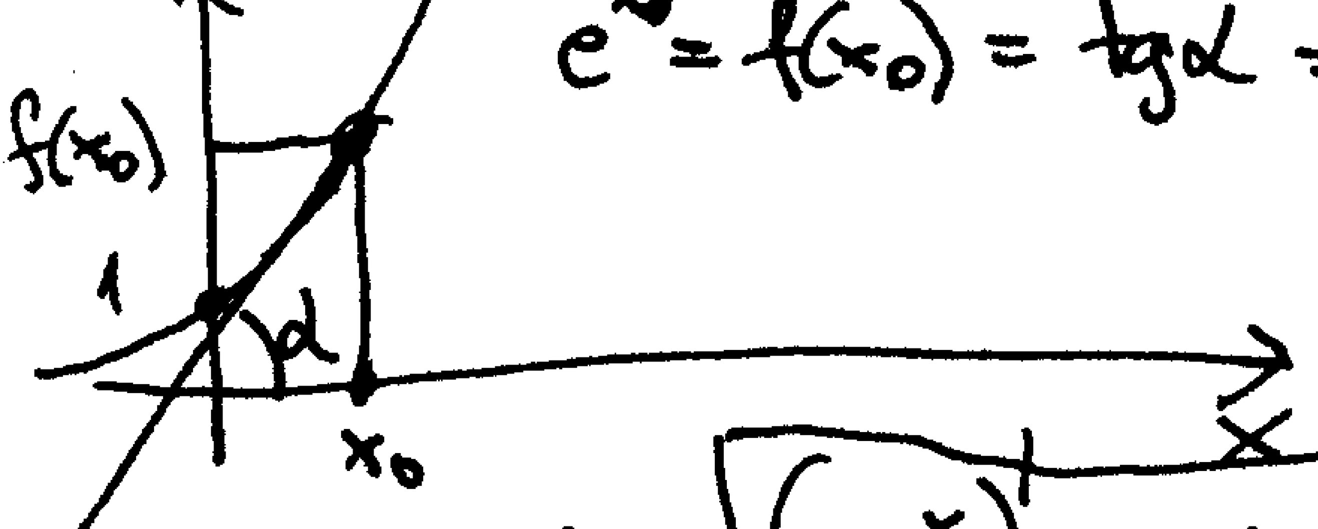


rosnąca $a > 1$ różnowartościowa



malejąca $0 < a < 1$ różnowartościowa

$e^{x_0} = f(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$



Wniosek $\boxed{(e^x)' = e^x}$

Własności

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

6. Funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$ a - podstawa logarytmu $a > 0$; $a \neq 1$; $x > 0$

Df. $\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$

Ważne podstawy $\underline{a = 10}$ — logarytm dziesiętny wtedy nie piszę się podstawy

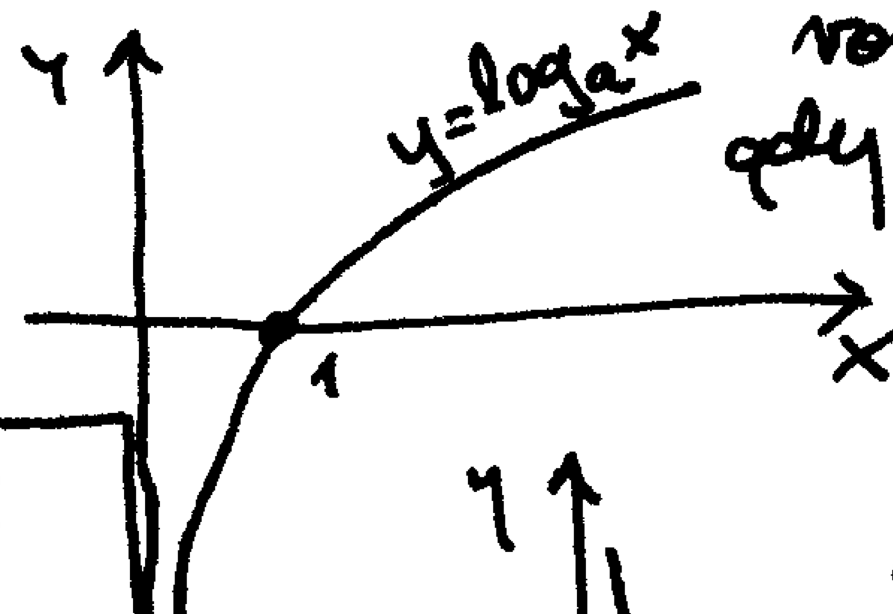
mamy $\log_{10} 10 = \log 10 = 1$; $\log 100 = 2$; $\log 1000 = 3$ itd.

Jeśli podstawa jest równa $\underline{e}$, to logarytm naturalny.
wtedy używa się symbolu $\ln$ zamiast $\log$.

logarytmu $\ln e = 1$; $\ln e^2 = 2$; itd

Własności logarytmu $x, y > 0$

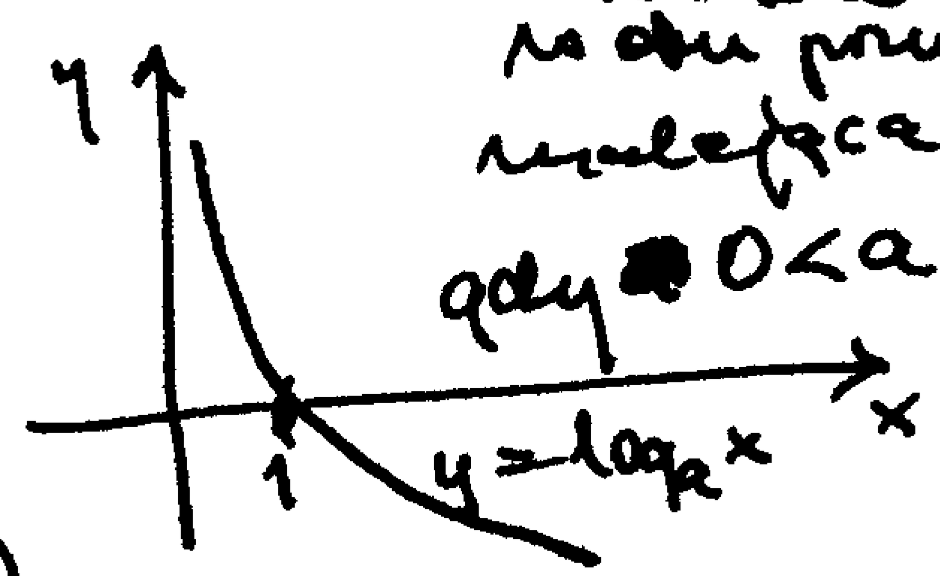
1. $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$
2. $\log_a x^y = y \log_a x$
3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
4. $a^{\log_a x} = x$
5. $a^{\log_a b} = b$
6. $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$



rosnąca gdy $a>1$

różnowartościowa w obu przypadkach.

malejąca gdy $0<a<1$



Symbole matematyczne

$\vee$ – lub, alternatywa

$\wedge$ – i, koniunkcja

$p \Rightarrow q$ (lub $p \to q$) – z p wynika q (implikacja)

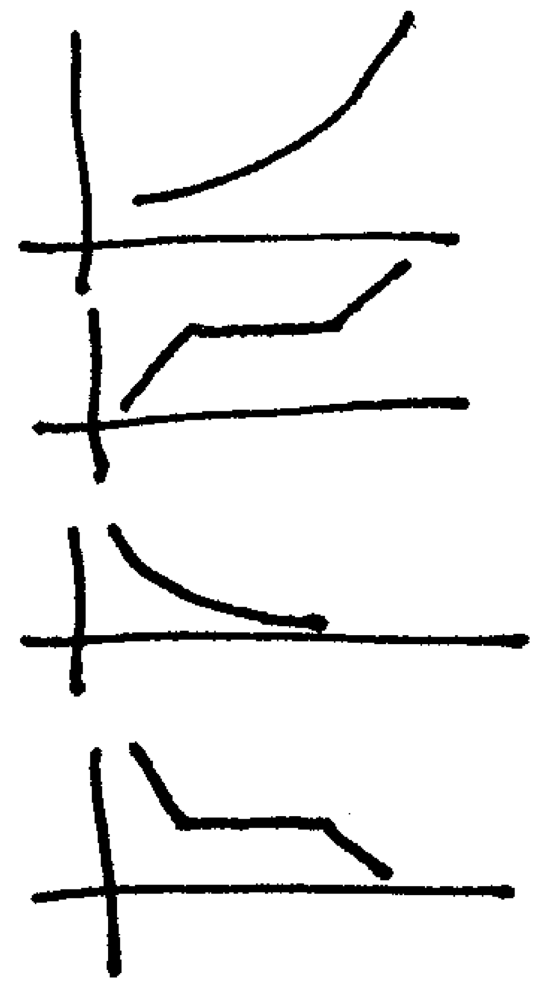
$p \Leftrightarrow q$ – p równoważne q

$\bigwedge_{x\in D}$ dla każdego x należącego do zbioru D

$\bigvee_{x\in D}$ istnieje ~~taki~~ x należące do D

Funkcje monotoniczne

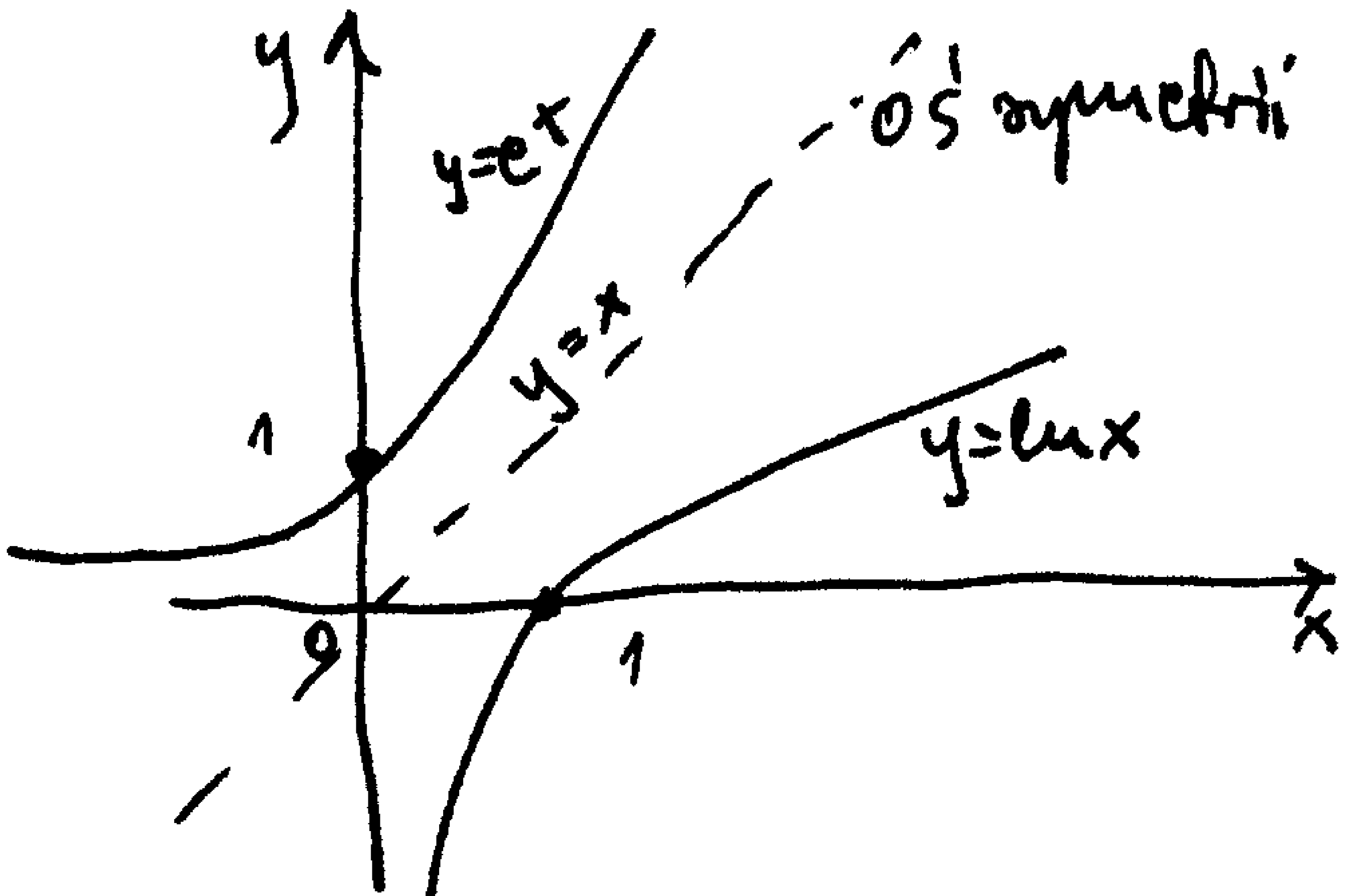
1. Funkcja $y=f(x)$ jest rosnąca $\Leftrightarrow \bigwedge_{x_1<x_2} f(x_1)<f(x_2)$
2. Funkcja $y=f(x)$ jest niemalejąca $\Leftrightarrow \bigwedge_{x_1\le x_2} f(x_1)\le f(x_2)$
3. Funkcja $y=f(x)$ jest malejąca $\Leftrightarrow \bigwedge_{x_1<x_2} f(x_1)>f(x_2)$
4. Funkcja $y=f(x)$ jest nierosnąca $\Leftrightarrow \bigwedge_{x_1\le x_2} f(x_1)\ge f(x_2)$



Funkcja odwrotna

Df: Niech $y=f(x)$ będzie funkcją rosnącą lub malejącą (ściśle monotoniczną). Funkcja $g(x)$ jest funkcją odwrotną do funkcji $y=f(x)$ jeśli $\bigwedge_x f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

Przykład $y=e^x \quad y=\ln x$



Df. (Różnowartościowość) Funkcja $y=f(x)$ jest różnowartościowa $\Leftrightarrow$
$\bigwedge_{x_1,x_2} x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

Dziedzina funkcji

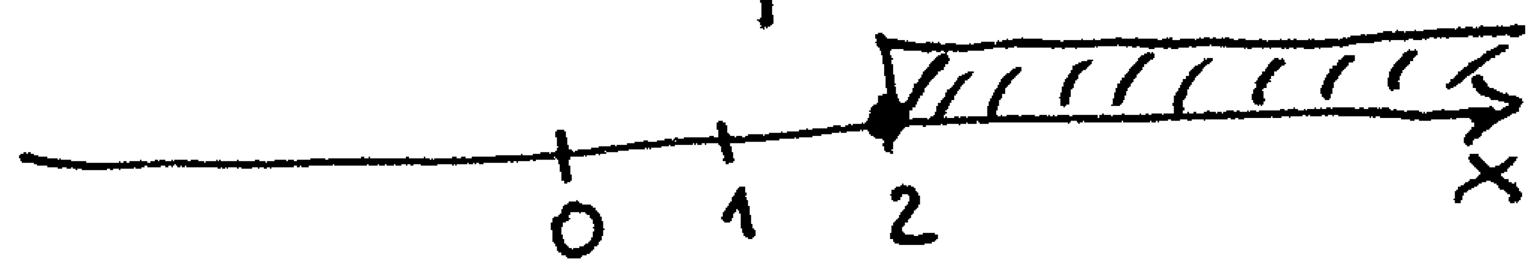
Rozpatrujemy funkcje rzeczywiste czyli $f:R\to R$.

Df. Dziedziną funkcji $f:R\to R$ nazywamy zbiór

$$\{x\in R;\ \bigvee_{y\in R}\ y=f(x)\}.$$

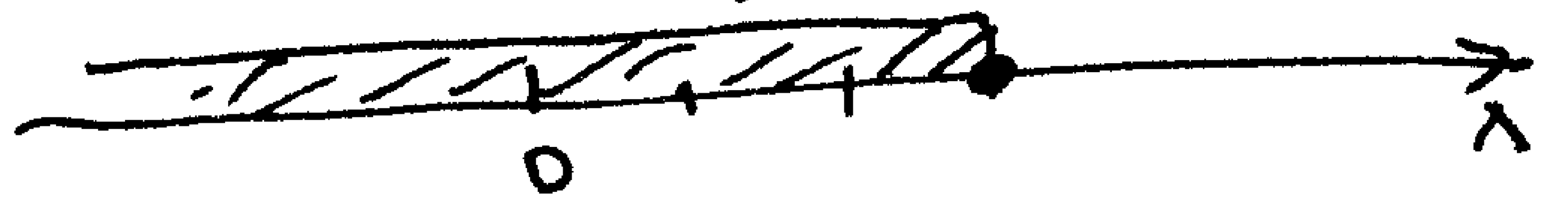
Przykłady

1. $y=\sqrt{x-2}$ Musi być $x-2\geqslant 0$ czyli $x\geqslant 2$



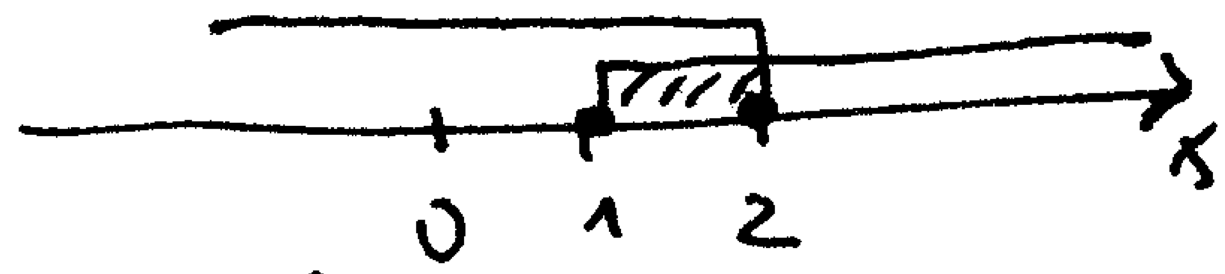
$D=[-2;+\infty)$

2. $y=\sqrt{3-x}$ Musi być $3-x\geqslant 0$ czyli $x\leqslant 3$



$D=(-\infty,3]$

3. $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}$



$2-x\geqslant 0$ i $x-1\geqslant 0$

$x\leqslant 2$ i $x\geqslant 1$

$D=[1,2]$

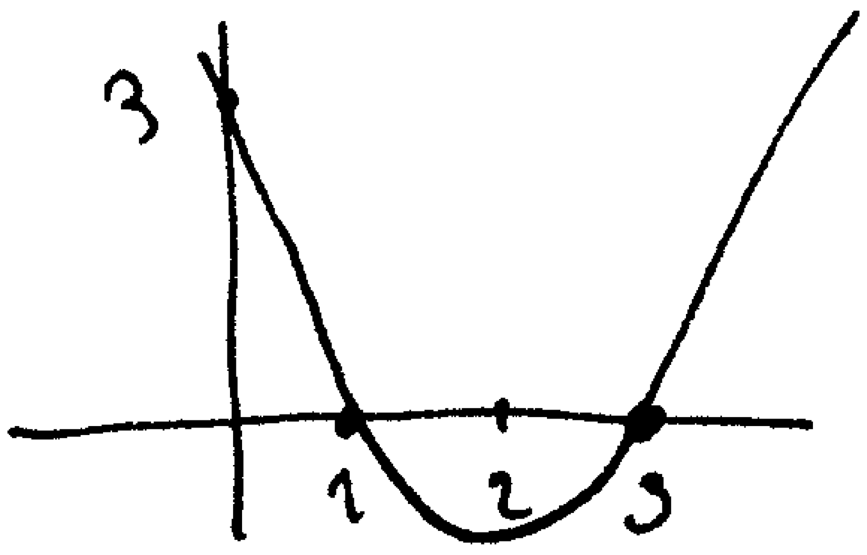
4. $y=\sqrt{x^2-4x+3}$

$x^2-4x+3\geqslant 0$

$\Delta=16-12=4$ $\sqrt{\Delta}=2$

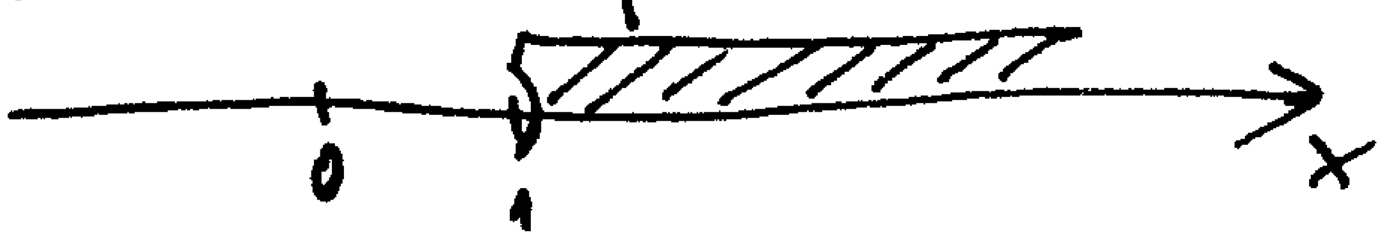
$x_1=\frac{4-2}{2}=1$

$x_2=\frac{4+2}{2}=3$



$D=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

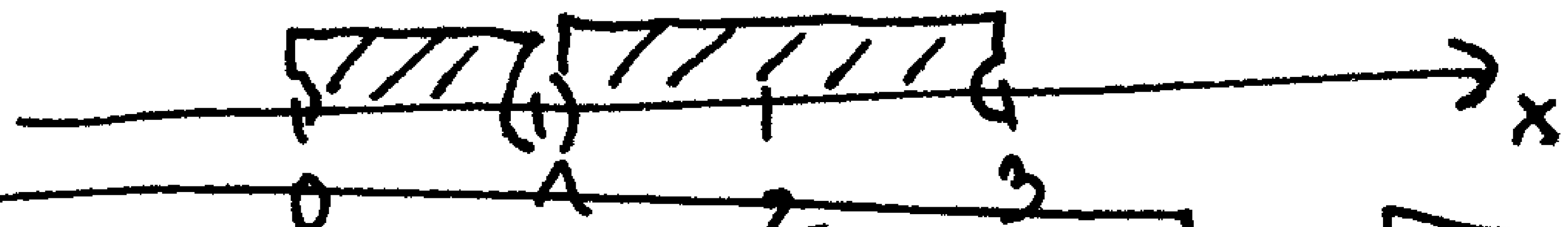
5. $y=\ln(x-1)$ Musi być $x-1>0$ czyli $x>1$ $D=(1,+\infty]$



6. $y=\log_x(3-x)$ Musi być $x\neq 1$ i $x>0$ i $3-x>0$

$x<3$

$D=\{x;\ x\in(0,1)\cup(1,3)\}$; $D=(0,1)\cup(1,3)$



$\boxed{\text{Tu skończyłem}}$

..11.2012. Matematyka - powtórzenie — Ćwiczenia

Funkcje wykładnicze, wielomianowe, logarytmiczne.

1. $x^3 = 8 \Leftrightarrow x^3 - 2^3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4) = 0$

$x = 2$ $\quad \Delta = 2^2 - 4\cdot1\cdot4 < 0$ brak rozw.

2. $x^4 = 1 \Leftrightarrow x^4 - 1^4 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 1^2 = (x^2-1)(x^2+1) = 0$ $\quad (x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$

brak $\quad x=1 \quad x=-1 \quad$ brak

3. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \quad x^2 = t \quad x_{11} = 1 \quad x_{12} = -1 \quad x_{21} = 3 \quad x_{22} = -3$

4. Obliczyć:

a) $\log_3 3^2$ (2) $\quad$ c) $\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{5}{3}\right)^3$ (−3) $\quad$ f) $3^{\log_3 5 + \log_3 2}$ (10)

b) $\log_2 8$ (3) $\quad$ d) $2^{\log_2 3}$ (3)

c) $\log_{0,1} 0{,}01$ (2) $\quad$ e) $4^{\log_2 5}$ (25)

5. Wiedząc, że $\log_2 5 \approx 2{,}322$ podać przybliżone wartości liczb

a) $\log_2 10$ $\quad$ d) $\log_2 6{,}25$

b) $\log_2 0{,}01$ $\quad$ e) $\log_2 \sqrt{40}$

c) $\log_2 0{,}4$ $\quad$ f) $\log_2 2\cdot\sqrt[3]{1{,}25}$

6. Obliczyć $\log_4 17 - 2\log_{16} 17$ (0)

7. Obliczyć

a) $2^{\log_2 5}$ (5) $\quad$ c) $4^{\log_2 3}$ (9)

b) $9^{\log_4 9}$ (3) $\quad$ d) $9^{\log_{27} 8}$ (4)

8. Wiedząc, że $\log_3 x = a$ obliczyć:

a) $\log_9 x$ ($\frac{1}{2}a$) $\quad$ c) $\log_{\frac{1}{3}} x$ ($-a$)

b) $\log_{27} x$ ($\frac{a}{3}$) $\quad$ d) $\log_{\frac{1}{81}} x$ ($-\frac{a}{4}$)

9. Wiedząc, że $\log_6 2 = a$ i $\log_6 5 = b$ obliczyć:

a) $\log_2 3 + \log_{36} 5$ $\quad \left(\frac{1}{a} - 1 + \frac{b}{2}\right)$

b) $\log_3 2 - \log_{\frac{1}{6}} 5$ $\quad \left(\frac{a}{1-a} + b\right)$

c) $\log_3 5$ $\quad \left(\frac{b}{1-a}\right)$

Zad. domowe dla grupy popołudniowej!

$-\frac{24998}{25000}$

10. Znaleźć x, jeśli

a) $\log x = \log 13 - 4\log 2$ ($\frac{13}{16}$) $\quad$ c) $\log(x+1) = \log 2 + 3\log 0{,}1 - \log 25$

b) $\log_2 x = 2\log_2 3 + 0{,}5\cdot\log_2 9$ (27) $\quad$ d) $\log_{0,1} x = \log_{0,1} 3 - 2$ (300)

→